

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n° 32(2005), 113–133

Un estudio de esquemas bien equilibrados en sistemas hiperbólicos no homogéneos.

E.D. FERNÁNDEZ NIETO ¹

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

edofer@us.es

Resumen

En este trabajo pretendemos dar una visión sobre cómo abordar el problema de aproximar un sistema hiperbólico no homogéneo. Comenzamos introduciendo aproximaciones descentradas, para cuya motivación se considera un sistema parabólico. Aplicando la técnica de las características se deduce que no se pueden tomar aproximaciones centradas de los términos fuente. Se introduce entonces una técnica general que permite definir el tipo de discretizaciones descentradas asociadas a una familia de esquemas numéricos. En concreto, se analiza cómo obtener esquemas equilibrados, es decir, esquemas que calculan, al menos con orden dos, todas las soluciones estacionarias del sistema. Debido a que las soluciones de sistemas hiperbólicos pueden presentar choques y cambios de régimen, se define el concepto de esquema asintóticamente bien equilibrado. En el caso de ecuaciones no homogéneas, se presenta un resultado de estabilidad y convergencia. Finalmente, se aplica esta técnica general al caso de las ecuaciones de aguas someras con fondo no plano. Se presentan varios tests numéricos: en el primero de ellos se estudia la evolución de una onda de rarefacción doble, con un salto en la superficie libre provocado por la presencia de un obstáculo en el fondo. En el segundo test se parte de una perturbación de una solución estacionaria con fondos discontinuos y se estudia la solución estacionaria a la cual converge.

Palabras clave: *Bien equilibrado, volúmenes finitos, término fuente, aguas someras, problemas proyectados.*

Clasificación por materias AMS: *65N06, 76B15, 76M20, 76N99.*

1 Introducción

En este trabajo estudiamos la extensión de esquemas de volúmenes finitos a sistemas no homogéneos. Pediremos que los esquemas sean *bien equilibrados* en

Fecha de recepción: 7/04/05

el sentido de que calculen todas las soluciones estacionarias al menos con orden dos, para un sistema hiperbólico no homogéneo general. Se aplica la teoría desarrollada al sistema de las ecuaciones de aguas someras. En este ejemplo de aplicación, consideramos términos fuente debidos a las variaciones de la topografía.

El estudio de esquemas de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos no homogéneos es un área de trabajo en la que recientemente se están obteniendo resultados significativos. Se podrían atribuir los primeros avances significativos en este campo a Roe, en un artículo publicado en el año 1986 (ver [22]).

La técnica usual para estudiar la discretización de términos fuentes consiste en utilizar buenos esquemas para el sistema homogéneo y combinarlos con técnicas de “splitting” o “división del problema”: dividir cada iteración de tiempo el problema en dos, siendo el primero de ellos homogéneo, el cual se aproxima mediante esquemas descentrados, como puede ser el conocido método de Roe; la solución de este problema se inyecta en el segundo, ya no homogéneo; en este caso, la discretización del término fuente suele ser centrada.

Ésta es una técnica con la que se pueden obtener muy buenos resultados en el contexto de la discretización de sistemas parabólicos. Sin embargo, en problemas hiperbólicos, el esquema anterior puede presentar inestabilidades.

Nada más comenzar la introducción ya han surgido las palabras “centrado” y “descentrado”. Justamente, aquí parece estar el origen del problema. Comencemos analizando el problema homogéneo, sin término fuente.

Consideramos una ecuación lineal de convección-difusión

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad w(x, t) :]0, L[\times]0, T[\rightarrow \mathbb{R},$$

que vamos a aproximar mediante el método de diferencias finitas. Para obtener una buena aproximación de las derivadas en espacio, bastaría considerar la fórmula, bien conocida, que nos proporciona el desarrollo de Taylor. Aproximamos el término de convección centrado en espacio, aproximación de segundo orden. Si consideramos una aproximación en tiempo de tipo Euler explícito, obtenemos

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} + a \frac{w_{i+1}^n - w_{i-1}^n}{2\Delta x} - \varepsilon \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad (1)$$

donde w_i^n es la aproximación de la solución en $x_i = i \Delta x$ en el instante $t_n = n \Delta t$.

Éste es, posiblemente, el ejemplo más simple relacionado con la discretización por diferencias finitas donde pueden observarse la utilidad aparente de la elección de un esquema centrado: en lugar de las aproximaciones

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta x} \quad \text{ó} \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{w_i - w_{i-1}}{\Delta x}, \quad (2)$$

que son de primer orden, tomamos la aproximación:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{w_{i+1} - w_i}{2\Delta x}.$$

El esquema resultante, bajo ciertas restricciones sobre los datos así como sobre Δt y Δx , es estable. De hecho, una de las condiciones necesarias para la estabilidad es la siguiente:

$$|a| \Delta x \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, si hacemos tender ε a cero, vemos que para que el esquema siga siendo estable, el paso de la discretización en espacio Δx debe tender igualmente a cero.

Así, si consideramos la ecuación hiperbólica lineal de transporte

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

e intentamos calcular una aproximación numérica de la misma con ayuda de (1) con $\varepsilon = 0$, vemos que el esquema resultante es inestable.

Es bien conocido que una buena forma de estabilizar el esquema consiste en tomar una aproximación descentrada de la derivada (2) en función del signo de a (ver, por ejemplo, los libros de LeVeque [15], Godlewski-Raviart [12] o Toro [24]).

Por tanto, es razonable pensar que la manera de discretizar una ecuación hiperbólica no homogénea debe estar relacionada con esta técnica. Es decir, por qué debería funcionar una aproximación centrada del término fuente.

Podemos encontrar una respuesta inmediata aplicando el método de las características. De este modo, se obtiene la generalización del *esquema descentrado* (“upwind scheme” en inglés).

Consideremos la ecuación de transporte no homogénea

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = g(x, W).$$

Si suponemos $a > 0$, el esquema adecuado es

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a(w_i^n - w_{i-1}^n) + \Delta t g_i, \quad (3)$$

donde g_i es una aproximación de

$$\frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}-a\Delta t}^{x_{i+1/2}-a\Delta t} g(x, w(x, t)) dx dt.$$

Basta observar que, si $a\Delta t/\Delta x \leq 1$ (ésta es la conocida condición CFL), entonces, el único punto que está en el dominio

$$(x_{i-1/2} - a\Delta t, x_{i+1/2} - a\Delta t),$$

independientemente del valor de $a\Delta t$ es $x_{i-1/2}$. Y por lo tanto, una aproximación de primer orden de la integral anterior es

$$g(x_{i-1/2}, (w_{i-1}^n + w_i^n)/2).$$

Recordemos que la aproximación de $a\partial w/\partial x$ en (3) es también sólo de primer orden. Análogamente, si $a < 0$, tomaremos la aproximación *descentrada a derecha*

$$g(x_{i+1/2}, (w_i^n + w_{i+1}^n)/2).$$

Parece pues claro que es necesario aplicar esquemas descentrados, tanto para la discretización de la derivada en espacio como para el término fuente.

1.1 Algunas referencias

Se indican en los siguientes párrafos algunos de los muchos artículos escritos sobre el problema en los últimos años (muchos otros podrían también haber sido citados).

Ya hemos mencionado anteriormente el trabajo de Roe. Es sin duda éste un nombre fuertemente ligado a la evolución de esquemas numéricos para sistemas hiperbólicos. Por ejemplo, por el conocido *esquema de Roe*. Se trata de un esquema de tipo Godunov, el cual considera la resolución de problemas de Riemann aproximados, donde se cambia el sistema hiperbólico no lineal de partida por una linealización muy robusta, conocida igualmente como *linealización de Roe*.

Centrándonos en la aportación de Roe al estudio de esquemas numéricos de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos no homogéneos, debemos resaltar el trabajo [22]. En él se estudia la relación entre la elección de fórmulas de cuadratura para aproximar la integral del término fuente con la propiedad de que el esquema calcule, al menos con orden dos, las soluciones estacionarias del sistema.

Bermúdez y Vázquez en [1] y [25] formalizan esta propiedad, pidiendo que el esquema numérico calcule de forma exacta, o al menos con orden dos, alguna solución estacionaria del sistema. En concreto, en estos trabajos se presenta la generalización del esquema de Roe a sistemas hiperbólicos no homogéneos y su aplicación a las ecuaciones de aguas someras. Se prueba que el esquema calcula de forma exacta la solución estacionaria de agua en reposo.

Por otro lado, Greenberg y Leroux introducen en [14] el concepto de esquema *bien equilibrado*. En este trabajo presentan un esquema numérico *equilibrado* para todas las soluciones estacionarias, cuando se considera una ecuación no homogénea.

Otros trabajos a resaltar son los de LeVeque [16], Zhou [26], Shi Jin [23] o Perthame-Simeoni [19] y [20].

Por otro lado, cuando estudiamos la aproximación de las ecuaciones de Saint-Venant, aparece el problema del tratamiento de *frentes seco-mojado*. El tratamiento correcto de esta problema, cuando el frente de agua avanza hacia una *pared* es un problema interesante, complejo y de gran importancia. Un correcto tratamiento de frentes seco-mojado puede influir, por ejemplo, en una aproximación correcta de la velocidad de expansión de un fluido en una rotura de presa. En la Tesis Doctoral de J.M. González-Vida [13], se propone la utilización de problemas de Riemann parciales. Se presenta una técnica basada

en la resolución exacta de los problemas de Rieman parciales y una segunda técnica, que reposa sobre la resolución aproximada de los mismos.

Por otro lado, un problema adicional consiste en estudiar esquemas de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos no homogéneos con términos no conservativos. En [4] Castro, Macías y Parés estudian la discretización de los términos de este tipo a partir del esquema de Roe. También en este trabajo presentan su aplicación a las ecuaciones de aguas someras bicapa.

Es ésta una técnica que además ha servido como vía, podemos decir alternativa, al tratamiento de términos fuente: reescribir el problema hiperbólico no homogéneo como un sistema en forma no conservativa. En este caso, entre los trabajos mas recientes podemos señalar el trabajo de Castro-Parés [5]. Se trata éste, sin duda, de un *camino* muy interesante, que permite obtener resultados teóricos (en muchas ocasiones escasos en el estudio de estas cuestiones) y de gran nivel de aplicación.

Nuestra aportación en el tema ha sido la siguiente: En [6], [8] y [10] se define una familia de esquemas numéricos bien equilibrados que pueden ser aplicados a cualquier sistema hiperbólico no homogéneo. Entre los esquemas que se incluyen en esta familia, se encuentra el método de Roe; igualmente, esquemas que incluyen la utilización de limitadores de flujo, y esquemas libres de correcciones entrópicas. Se introduce el concepto de esquemas *asintóticamente bien equilibrados*, cuyo estudio abordaremos a lo largo de este trabajo. Igualmente, se estudia el problema de sistemas bidimensionales a partir de la construcción de esquemas proyectados no homogéneos. Finalmente, se aplican estas técnicas a la resolución de las ecuaciones de aguas someras.

1.2 Algunas aplicaciones

Se ha planteado el problema, así como algunas de las referencias que lo estudian. Pero veamos algunas aplicaciones, es decir, algunos ejemplos de sistemas hiperbólicos no homogéneos, y el origen de la definición de los términos fuente.

Ya se ha mencionado anteriormente, en varias ocasiones, el sistema de ecuaciones de aguas someras. Mediante estas ecuaciones se puede estudiar el movimiento de un fluido en ríos, canales o zonas costeras. En este caso, si el dominio por el que circula el fluido no es plano, el gradiente de la topografía define el término fuente.

Las ecuaciones de aguas someras se deducen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante integración vertical, suponiendo que tenemos un dominio en el que la dimensión vertical es mucho menor que sus dimensiones horizontales, además de aceptar la hipótesis de presión hidrostática. Precisamente, al integrar en altura para deducir las ecuaciones, del término de presión obtenemos una doble contribución a su escritura final: en los términos de flujo físico y el término fuente del sistema debidos a variaciones del fondo. Si consideramos la solución de agua en reposo, lo que ocurre es que todos los términos se anulan excepto estos dos, por lo que estaremos estudiando la discretización del esquema de los términos de presión.

Mediante otras reformulaciones de ecuaciones de aguas someras se pueden modelar desde efectos de avalancha en montañas hasta un líquido en ebullición (ver Fowler [11], Mangeney [17] y Tai [18]). En el primer caso, el término se define a partir de la *ley de fricción de Coulomb*. Esta ley parte de la hipótesis que el término de fricción es proporcional a la presión que soporta. Aparecen en la formulación los conceptos de ángulo de reposo y ángulo de fricción interna. En el segundo caso, el término fuente representa transferencia de masa, de momento cinético y de calor entre las fases gas-líquido.

En la página web *www.damflow.org*, se pueden encontrar algunos ejemplos de estudio del movimiento de un fluido bajo el modelo de las ecuaciones de aguas someras. En colaboración con M.J. Castro-Díaz, J.M. González-Vida y C. Parés-Madroñal, de la Universidad de Málaga, se ha estudiado la rotura de la presa de Aznalcollar, que tuvo lugar en la provincia de Sevilla en abril de 1998. Se ha utilizado la topografía real de la zona proporcionada por F.J. Segovia Espiau, de la Universidad de Sevilla.

2 Esquemas asintóticamente equilibrados.

En esta sección comenzamos describiendo algunos esquemas de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos homogéneos. En la segunda subsección continuamos con la motivación de cómo construir esquemas de volúmenes finitos equilibrados. También se introduce el concepto de esquemas asintóticamente equilibrados y se presentan para ellos algunos resultados.

2.1 Una familia de esquemas para sistemas hiperbólicos homogéneos

Sea el sistema hiperbólico homogéneo

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = 0, \quad W :]0, L[\times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

donde por $F(W)$ denotamos la función de flujo físico. Dada una partición $\{x_i\}_{i=0}^n$ de $[0, L]$, con $x_i = i \Delta x$, denotamos $V_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ el volumen de control en 1D.

Integrando el sistema anterior en V_i , obtenemos la estructura conservativa del esquema. Aproximando la derivada en tiempo por ejemplo por el esquema de Euler explícito, se obtiene la estructura:

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \frac{\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0,$$

donde $\phi_{i+1/2}^n = \phi(W_i^n, W_{i+1}^n)$ denota una aproximación de $F(W(x_{i+1/2}, t^n))$.

Como veíamos en la introducción, si definimos, por ejemplo, $\phi_{i+1/2}^n = (F(W_i^n) + F(W_{i+1}^n))/2$, el esquema es inestable.

En los esquemas de tipo Godunov, para deducir la definición de $\phi_{i+1/2}$ se consideran problemas de Riemann parciales. Dependiendo del “solver” de

Riemann utilizado llegamos a esquemas distintos: si los problemas de Riemann se resuelven de forma exacta, obtenemos el esquema de Godunov; si se utiliza una linealización, obtenemos (por ejemplo) el esquema de Roe, etc.

En este trabajo consideramos una familia de métodos numéricos entre los que se encuentran los métodos de Roe y Lax-Wendroff, así como esquemas con limitadores de flujo. Igualmente, se pueden incluir esquemas libres de correcciones entrópicas (ver [7]).

Consideramos la siguiente definición de la función de flujo numérico:

$$\phi(W_i, W_{i+1}) := F_C(W_i, W_{i+1}) - \frac{1}{2}D(W_i, W_{i+1})(W_{i+1} - W_i), \quad (4)$$

donde por $D(W_i, W_{i+1})$ denotamos la matriz de descentramiento del esquema. Esta matriz es una aproximación de cierta matriz $\mathcal{D}(\widetilde{W}_{i+1/2})$ siendo $\widetilde{W}_{i+1/2}$ un estado intermedio para los valores W_i y W_{i+1} , por ejemplo el valor medio de ellos o el *valor medio de Roe* (ver Roe [21]). La matriz \mathcal{D} debe ser definida (o, al menos, semidefinida) positiva. Se trata de la matriz de difusión del esquema, relacionada con la matriz de descentramiento por la identidad

$$D(W, W) = \mathcal{D}(W).$$

Por ejemplo, el esquema de Roe se puede escribir bajo la estructura (4), donde

$$D(W_i, W_{i+1}) = |\widetilde{A}(\widetilde{W}_{i+1/2})|$$

y \widetilde{A} es la matriz de Roe, la cual debe verificar la condición:

$$F(W_{i+1}) - F(W_i) = \widetilde{A}(\widetilde{W}_{i+1/2})(W_{i+1} - W_i)$$

Nota 1 La definición de la matriz valor absoluto, parte de la hipótesis que el sistema es hiperbólico y, por tanto, la matriz Jacobiana del flujo, que denotaremos A , es diagonalizable. Entonces, si

$$A = X\Lambda X^{-1} \quad \text{con} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_i, i = 1, \dots, N),$$

pondremos $|A| = X|\Lambda|X^{-1}$ con $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_i|, i = 1, \dots, N)$.

Nota 2 Teniendo en cuenta este ejemplo en la definición de la matriz de difusión numérica, sólo podremos suponer que $\mathcal{D}(W)$ es una función Lipschitziana de W . Su derivada puede tener discontinuidades en puntos en que se anule alguno de sus valores propios.

Por $F_C(W_i, W_{i+1})$ denotamos una aproximación centrada de F en $x_{i+1/2}$. La definición que encontramos en la mayoría de los esquemas, como en el de Roe, es

$$F_C(W_i, W_{i+1}) = \frac{F(W_i) + F(W_{i+1})}{2}$$

Incluimos la posibilidad de otras definiciones de F_C por el siguiente motivo. Es conocido que, por ejemplo para el método de Roe, cuando alguno de los

autovalores de la matriz de difusión se anula, se produce una falta de “viscosidad numérica” que hace que el esquema pueda no converger a la solución entrópica. Es conocido el efecto de “pata de perro” que presenta el método de Roe en una onda de rarefacción en la que haya una transición en la naturaleza del fluido (paso de subsónico a supersónico), lo que implica que en esta zona se anula uno de los autovalores de la matriz Jacobiana del flujo.

Existen técnicas, como el conocido método de regularización de Harten, que permiten introducir cierta viscosidad numérica artificial en el esquema.

Veamos ahora un ejemplo, que podemos encontrar en [9]. Con este ejemplo pretendemos motivar la nueva definición de F_C . Consideramos una ley de conservación escalar (denotemos entonces por u la incógnita y por $f(u)$ la función de flujo físico) y suponemos

$$u_i < u_{i+1}, \quad (5)$$

con

$$f(u_i) = f(u_{i+1}), \quad (6)$$

donde f es estrictamente convexa. Tendremos entonces que la matriz de Roe (escalar en este caso), debe verificar:

$$f(u_{i+1}) - f(u_i) = a(u_i, u_{i+1})(u_{i+1} - u_i).$$

Debido a (5) y (6), tenemos por tanto que $a(u_i, u_{i+1}) = 0$. Entonces, la función de flujo numérico queda reducida a

$$\phi(u_i, u_{i+1}) = f(u_i) = f(u_{i+1})$$

Sin embargo, en este caso ϕ debe ser una aproximación de $f(u(x_{i+1/2}))$. En [7] se propone la siguiente definición de F_C :

$$F_C(W_i, W_{i+1}) = \frac{F_C(W_{i+\alpha}) + F_C(W_{i+1-\alpha})}{2}, \quad (7)$$

donde $W_{i+\alpha} = (1 - \alpha)W_i + \alpha W_{i+1}$ con $\alpha \in [0, 1]$.

Tenemos la situación descrita en la Figura 1.

En concreto, en [7] se utiliza esta definición de F_C junto con una definición adecuada de una matriz de difusión, para el caso de las ecuaciones de aguas someras, cuyos autovalores se anulan cuando el fluido se encuentra en régimen supercrítico.

2.2 Esquemas asintóticamente equilibrados

Comenzamos motivando la discretización que vamos a considerar del término fuente del sistema hiperbólico no homogéneo

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = G(x, W). \quad (8)$$

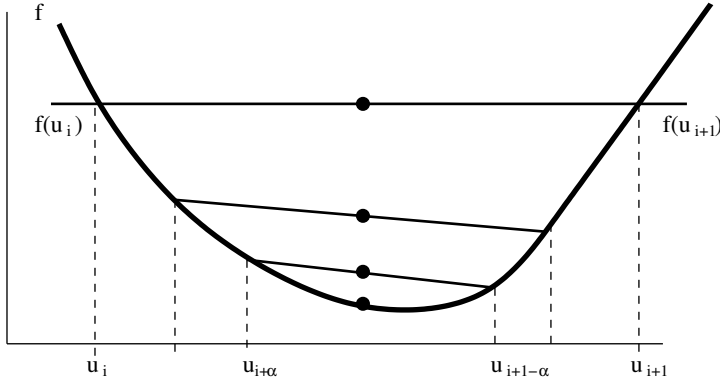


Figura 1: Motivación para la definición de F_C .

Y la motivación comienza a partir de lo que se conoce como *ecuación equivalente* de los esquemas definidos para el sistema homogéneo. De hecho, se dice que los esquemas definidos por (4) se pueden escribir *en forma viscosa* porque se pueden interpretar como discretizaciones centradas (véase Roe [22]), aproximaciones de orden dos en espacio, del sistema de convección-difusión equivalente

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) - \nu \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{D}(W) \frac{\partial}{\partial x} W) = 0. \quad (\nu = \Delta x/2) \quad (9)$$

El término

$$-\nu \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{D}(W) \frac{\partial W}{\partial x}),$$

representa la difusión numérica que el esquema introduce que, como vimos anteriormente, resulta necesaria por razones de estabilidad.

Si introducimos una discretización centrada del término fuente, podemos mirar este esquema numérico como una aproximación centrada del sistema equivalente

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) - \nu \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{D}(W) \frac{\partial}{\partial x} W) = G(x, W). \quad (10)$$

Recordemos que buscamos esquemas *equilibrados*, es decir, buscamos que el esquema calcule, al menos con orden dos, todas las soluciones estacionarias del sistema.

Toda solución estacionaria regular \overline{W} verifica

$$\frac{\partial F(\overline{W})}{\partial x} = G(x, \overline{W}),$$

y por tanto, en general, no es solución estacionaria de (10).

La idea en la que nos basaremos para definir la aproximación del término fuente consiste en añadir un término de corrección $\mathcal{C}(x, W)$ a la ecuación (10),

de forma que toda solución estacionaria regular de (8) sea solución estacionaria del sistema

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}(W) \frac{\partial}{\partial x} W \right) = G(x, W) + \mathcal{C}(x, W).$$

Si denotamos $A(W)$ la matriz Jacobiana del flujo, y ésta no es singular, entonces, basta definir

$$\mathcal{C} = -\nu \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{D}(W) A^{-1}(W) G(x, W)).$$

Si $A(W)$ es singular, supongamos por simplicidad que tenemos un sistema de dimensión $N = 2$, y

$$A(W) = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^{-1}, \quad D(W) = X \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^{-1}.$$

Entonces, para que se cumpla la propiedad deseada, basta definir

$$\mathcal{C}(x, W) = -\nu \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{D}(W) \widetilde{A^{-1}}(W) G(x, W)). \quad (11)$$

donde

$$\widetilde{A^{-1}}(W) = X \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^{-1}.$$

La definición de la matriz $\widetilde{A^{-1}}$ recoge la idea de que no hace falta descentrar en los campos característicos cuyos autovalores sean nulos (ver [25]). De esta forma se tomará el inverso de los autovalores de A o cero. Si la matriz A no es singular, la definición de la matriz $\widetilde{A^{-1}}$ coincide con la de la inversa de A . Podemos entonces definir siempre $\mathcal{C}(x, W)$ por (11).

Podemos además conseguir que los esquemas tengan estructura conservativa observando que podemos reescribir el sistema equivalente, incluyendo la definición anterior de $\mathcal{C}(x, W)$, como sigue:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[F(W) - \nu \mathcal{D}(W) \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \widetilde{A^{-1}}(W) G(x, W) \right) \right] = G(x, W). \quad (12)$$

Proponemos entonces esquemas de tres puntos con la estructura

$$\begin{aligned} & \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \frac{\phi_G(W_i^n, W_{i+1}^n) - \phi_G(W_{i-1}^n, W_i^n)}{\Delta x} = \\ & = G_C(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, W_{i-1}^n, W_i^n, W_{i+1}^n) \end{aligned} \quad (13)$$

donde por ϕ_G denotamos la función de flujo numérico, modificada por la presencia del término fuente. Por G_C denotamos una aproximación centrada de G en $x = x_i$.

Definimos la función ϕ_G como

$$\phi_G(W_i, W_{i+1}) = F_C(W_i, W_{i+1}) -$$

$$-\nu D(W_i, W_{i+1}) \left(\frac{W_{i+1} - W_i}{\Delta x} - \widetilde{A}^{-1}(W_i, W_{i+1}) G_D(x_i, x_{i+1}, W_i, W_{i+1}) \right), \quad (14)$$

donde G_D es una aproximación de G en $x = x_{i+1/2}$ y $\widetilde{A}^{-1}(W_i, W_{i+1})$ es una aproximación de $\widetilde{A}^{-1}(\widetilde{W}_{i+1/2})$. Recordemos también que $D(W_i, W_{i+1})$ es una aproximación de $\mathcal{D}(\widetilde{W}_{i+1/2})$ y $\widetilde{W}_{i+1/2}$ es un estado intermedio para los valores W_i y W_{i+1} .

Nota 3 Usualmente, para aproximar el término fuente de un sistema hiperbólico se consideran esquemas con una estructura que no altera las componentes correspondientes al primer miembro de la ecuación. De esta forma, se suelen escribir todos los términos relacionados con la aproximación del término fuente en el segundo miembro de (13).

Sin embargo, si buscamos esquemas en forma conservativa, cuya estructura coincide con la obtenida al integrar la ecuación sobre el volumen de control, llegamos a la definición (13).

Igualmente, está justificado si consideramos esquemas de tipo Godunov para obtener las aproximaciones de la funciones de flujo en los puntos de las interceldas $x_{i+1/2}$. En este caso, para aproximar $F(W(x_{i+1/2}, t^{n+1}))$ se consideraría el problema de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = G(x, W); \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_i^n & x < x_{i+1/2}, \\ W_{i+1}^n & x > x_{i+1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

Independientemente de que consideremos “solvers” exactos o aproximados, es evidente que la definición obtenida para el caso homogéneo, dada por $\phi_{i+1/2}$, debe ser modificada, pues la solución del problema con el término fuente G debe ser diferente. De esta forma, con el esquema dado por (13), la función de ϕ_G dada por (14) es una aproximación de $F(W(x_{i+1/2}, t^{n+1}))$, donde W es la solución del problema de Riemann no homogéneo (15).

2.3 Propiedades de equilibrado

En esta subsección estudiamos las propiedades de equilibrado de los esquemas propuestos.

En primer lugar, debemos prestar atención a la regularidad de las matrices de difusión numérica del esquema. En concreto, anteriormente estuvimos considerando la matriz valor absoluto. Con este ejemplo vemos que sólo podemos suponer con carácter general que la matriz $\mathcal{D}(W)$ es Lipschitziana.

Supongamos ahora que W es una solución para la cual todos los autovalores de $A(W)$ son o bien no nulos o bien idénticamente nulos en todo el dominio de definición. Entonces la matriz de difusión también es regular en todo el dominio. Sin embargo, si los autovalores se anulan en puntos aislados, tenemos un problema para hablar de *equilibrado con orden dos*, pues algunas componentes

del esquema no son suficientemente regulares. Observamos también que, aunque en principio la introducción de la matriz $\widetilde{A^{-1}}(W)$ podría llevar a pensar en problemas de regularidad, debido a su definición, la única obstrucción para hablar de equilibrado de segundo orden se encuentra en los mismos puntos que para la matriz $\mathcal{D}(W)$. Es decir, puntos en los que alguno de sus autovalores posee un cero aislado.

Por simplicidad en la exposición, dada una solución W de (8), supondremos que existe una superficie continua $\gamma \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\mathcal{D}(W)$ y $A(W)$ son de clase C^2 en $\mathbb{R}^N \setminus \gamma$.

Por tanto, para probar que el esquema es equilibrado con orden dos, tendremos que trabajar sobre subconjuntos donde todas las componentes del esquema sean regulares. Se introduce entonces la siguiente definición:

Definición 1 (*Esquemas asintóticamente equilibrados*)

Diremos que el esquema (13)-(14) es asintóticamente equilibrado para una solución estacionaria W del sistema hiperbólico (8) si existe una sucesión creciente de compactos $\{K_n\}_n$ tal que:

- 1) $\mu([0, L] \setminus \cup_n K_n) = 0$, donde por μ denotamos la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .
- 2) Para todo n existe $\delta_n > 0$ tal que, si $0 < \Delta x < \delta_n$, el esquema equilibra al sistema sobre K_n al menos con orden 2.

Dada una función continua $W : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^N$ llamaremos conjunto de puntos regulares y de puntos singulares para W respecto del esquema (13), (14) a los definidos respectivamente por

$$\omega(W) = \{x \in [0, L] \text{ tal que } W(x) \subset (\mathbb{R}^N \setminus \gamma)\}$$

y

$$\sigma(W) = [0, L] \setminus \omega(W).$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea $W : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una solución estacionaria de clase C^2 del sistema (8). Entonces se tiene:*

- a) Si $\sigma(W) = \emptyset$, el esquema (13)-(14) equilibra el sistema (8) con orden 2 al menos.
- b) Si el conjunto de puntos singulares de W , $\sigma(W)$, tiene medida nula, entonces el esquema (13)-(14) equilibra asintóticamente al sistema (8).
- c) Supongamos que $\mathcal{D}(W)$ tiene los mismos autovectores que $A(W)$ y sus autovalores se anulan en los mismos puntos. Entonces, el esquema (13)-(14) equilibra asintóticamente al sistema (8).

Para la demostración, véase [10] y [8].

En el último apartado de este resultado, se pide que la definición de la matriz D esté relacionada con la de la matriz A . Ésta es una hipótesis que se verifica de forma inmediata para la mayoría de las posibles definiciones de la matriz de difusión numérica, por ejemplo cuando se define como la matriz valor absoluto de A .

3 Algunas elecciones de la matriz D

La propiedad del apartado c) del teorema 1 de que las matrices D y A tengan los mismos autovectores aparece además como condición suficiente en el siguiente resultado clásico de estabilidad (ver [12]) para sistemas lineales homogéneos:

Teorema 2 *Si la matriz D tiene los mismos autovectores que A y además sus autovalores d_j y a_j respectivamente verifican*

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} a_j\right)^2 \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} d_j \leq 1 \quad \forall j, \quad (16)$$

entonces el esquema es L^2 estable.

A partir de este teorema, podemos dar algunas elecciones posibles de la matriz D , de forma que tenga los mismos autovectores que A y sus autovalores d_j verifiquen la desigualdad (16).

Los métodos de Roe y Lax-Wendroff corresponden a tomar $d_j = |a_j|$ y $d_j = (\Delta t / \Delta x) a_j^2$ respectivamente. Estas definiciones de d_j verifican las desigualdades (16) bajo la condición CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_j |a_j| \leq 1.$$

El esquema de Roe tiene como matriz de difusión la matriz valor absoluto:

$$D = |A|.$$

El esquema de Lax-Wendroff se puede definir con

$$D = \frac{\Delta t}{\Delta x} A^2.$$

Este esquema proporciona segundo orden en tiempo, con una iteración. Tiene el inconveniente de que puede presentar oscilaciones en los choques. De esta forma, se introducen esquemas con limitadores de flujo, con la idea de aplicar el método de Roe cerca de las discontinuidades y el método de Lax-Wendroff en zonas regulares. Se pueden introducir este tipo de esquemas definiendo

$$D = |A| - X \Lambda_\varphi X^{-1}. \quad \text{con} \quad \Lambda_\varphi = \text{Diag}\left(\left(\text{sig}(\lambda_j) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_j\right) \lambda_j \varphi(r_j), j = 1, \dots, N\right),$$

donde

$$r_j = \frac{\alpha_{j,i_o}}{\alpha_{j,i}}, \quad \text{y} \quad \alpha_{j,i} = [X^{-1}(W_{i+1} - W_i)]_j,$$

con $i_o = i - \text{sig}(\lambda_j)$.

Algunos ejemplos clásicos de funciones de limitadores de flujo son los de Van Leer y *minmod*, dados por las siguientes elecciones de φ :

$$\varphi(r) = \frac{|r| + r}{1 + r}, \quad \varphi(r) = \max(0, \min(1, r)).$$

Otras definiciones se pueden encontrar en [15] y [12].

4 Análisis de estabilidad y convergencia para ecuaciones escalares no homogéneas

En esta sección se estudia bajo qué condiciones el esquema aplicado a una ecuación no homogénea es L^∞ estable y convergente.

Consideramos el problema de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = g(x, w), \\ w(x, 0) = w_0(x), \\ \left\{ \begin{array}{ll} w(x) = 0 & \text{en } x = 0 \text{ y } x = L \text{ si } f'(x)(x - L/2) < 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 & \text{en } x = 0 \text{ y } x = L \text{ si } f'(x)(x - L/2) \geq 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Escribimos el esquema en forma incremental:

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} B_{i-1/2}^n \nabla w_{i-1/2}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} C_{i+1/2}^n \nabla w_{i+1/2}^n + \mathcal{G}_i^n,$$

donde

$$\mathcal{G}_i^n = \Delta t \left(\frac{1}{2} (1 + \rho_{i-1/2}^n) g_{i-1/2}^n + \frac{1}{2} (1 - \rho_{i+1/2}^n) g_{i+1/2}^n \right)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_{i\pm 1/2}^n = \frac{|f'(w_{i\pm 1/2}^n)|}{f'(w_{i\pm 1/2}^n)}, & \text{si } \text{sgn}(f'(w_{i-1/2}^n)) = \text{sgn}(f'(w_{i+1/2}^n)), \\ \rho_{i\pm 1/2}^n = 0, & \text{caso contrario.} \end{array} \right.$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 3 *Supongamos que los coeficientes satisfacen*

$$B_{i-1/2} \geq 0, \quad C_{i+1/2} \geq 0;$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(B_{i-1/2}^n + C_{i+1/2}^n \right) \leq 1; \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(B_{i+1/2}^n + C_{i+1/2}^n \right) \leq 1.$$

Entonces el esquema es L^∞ estable y de variación total acotada. En concreto, se tiene que para todo n :

$$1. \quad \max_i |w_i^n| \leq \max_i |w_0^n| + t_n \|g\|_{L^\infty}$$

$$2. \quad TV(w^n) \leq e^{\alpha t_n} TV(w_0) + \beta(e^{\alpha t_n} - 1)/\alpha,$$

donde $\alpha = 4\|D_w g\|_{L^\infty(K)}$ y $\beta = L\|D_x g\|_{L^\infty(K)}$, siendo K un compacto de $[0, L] \times \mathbb{R}$ que contiene el grafo generado por los w_i^k $k = 0, \dots, n$.

Como consecuencia, se tiene además el siguiente resultado de convergencia:

Corolario 4 *Bajo una condición CFL*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |f'| \leq c_{cfl} \quad (17)$$

con c_{cfl} dependiente de la parte homogénea del esquema, la solución proporcionada por el esquema converge en $L_{loc}^1([0, L] \times \mathbb{R})$ a la solución entrópica del problema original.

4.1 Tests numéricos.

En esta subsección presentamos dos tests numéricos en el caso de las ecuaciones de aguas someras. Las incógnitas las denotaremos por h , la altura de la columna de agua y q el caudal. En el primero de ellos, consideramos una doble onda de rarefacción más un salto provocado por un escalón en el fondo. El segundo test consiste en recuperar una solución estacionaria. En este último caso comparamos los niveles de energía calculados por el esquema, el cual debe ser constante.

Los resultados que se presentan corresponden a una matriz de difusión igual a la matriz valor absoluto, con valor constante $\alpha = 1/8$.

Test 1: Doble onda de rarefacción con choque.

El test siguiente fue propuesto por Bouchut en [2]. Se estudia la evolución de una doble onda, sobre un fondo con un obstáculo. En la superficie libre se observa tanto la aparición de una onda de rarefacción como un choque, debido a la presencia del obstáculo.

La definición del fondo del dominio es la siguiente: $H(\vec{x}) = 10 - z_b(\vec{x})$ con

$$z_b(x) = \begin{cases} 1 & 25/3 < x < 12,5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El dominio es $[0, 25]$, para el que tomamos un paso en espacio $\Delta x = 0,25$. En este test comparamos los resultados obtenidos por el esquema numérico para $c_{cfl} = 0,8$ y $c_{cfl} = 1$. También se compara con la solución obtenida para valores de Δx suficientemente pequeños para que los resultados numéricos no varíen.

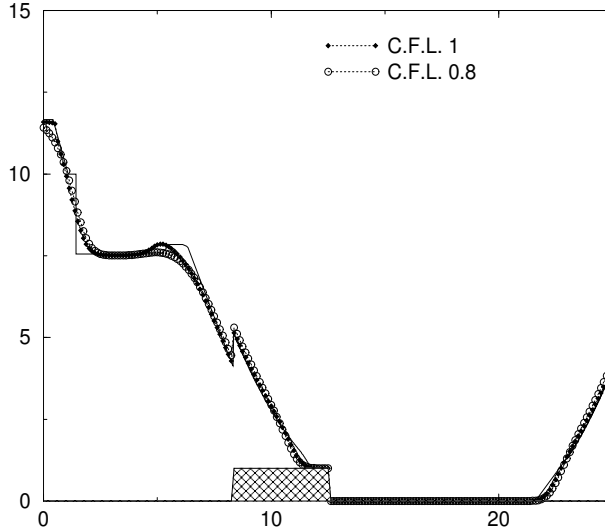


Figura 2: Test 1: Superficie libre

Como condición de contorno en $x = 0$ y $x = 25$ se duplican los estados en la frontera. La condición inicial está determinada por una superficie libre constante a 10 metros en todo el dominio ($h(x, y) = 10 - z_b(x, y)$) y caudal

$$q(x) = \begin{cases} 350 & \text{si } x > 50/3, \\ -350 & \text{si } x < 50/3. \end{cases}$$

Los resultados que se presentan corresponden al tiempo $t = 0,25$. En la Figura 2 se presentan los resultados obtenidos. Observamos una buena aproximación de la velocidad del frente, así como de la onda de rarefacción y el choque.

Test 2: Soluciones estacionarias.

Realizamos dos tests propuestos en [23]. Están basados en el hecho de que las soluciones estacionarias de las ecuaciones de aguas someras no homogéneas verifican

$$q = \text{const.}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{q}{h} \right)^2 + g(h + z_b(x)) = \text{const.} \quad (19)$$

La condición (19) expresa la conservación de energía total (energía cinética + energía potencial).

Para los dos siguientes sub-tests, tomamos $g = 1$ y analizamos la solución numérica que proporciona el esquema propuesto con (19).

El dominio es en ambos casos $]0, 1[$, tomamos $\Delta x = 0,01$ y una condición CFL correspondiente a $c_{cfl} = 0,8$.

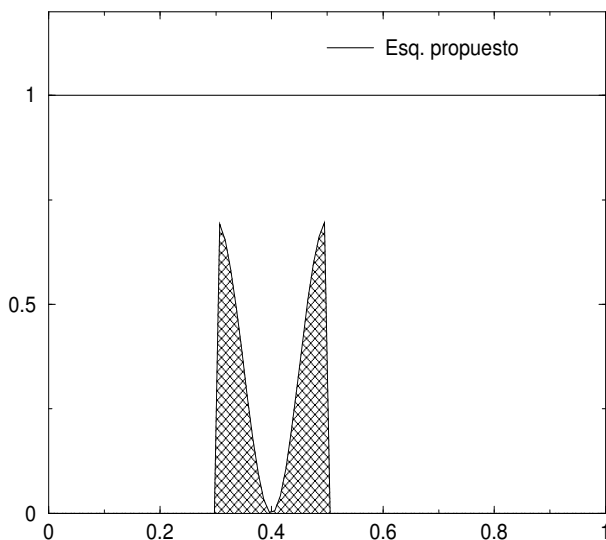


Figura 3: Test 2.1: $\frac{1}{2} \left(\frac{q}{h} \right)^2 + g(h + z_b(x))$ y función de fondo.

Test 2.1: Solución estacionaria en reposo. En este caso, la función que describe el fondo es

$$z_b(x) = \begin{cases} 0,35 \times (\cos(\pi(x - 0,5)/0,1) + 1) & 0,3 < x < 0,5; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La condición inicial es

$$h_i = 1 - \frac{1}{2}(z_{i-1/2} + z_{i+1/2}), \quad \text{con} \quad z_{i+1/2} = (z_i + z_{i+1})/2$$

y

$$q_i = 0.$$

Para esta condición inicial, tenemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{q}{h} \right)^2 + g(h + z_b(x)) = 1 \quad (20)$$

en todos los puntos excepto en un entorno del obstáculo.

En la Figura 3 se presentan el perfil de la función del fondo y el resultado numérico que se obtiene para el nivel de energía, que debe ser constante a uno. Observamos que la solución estacionaria obtenida por el esquema propuesto satisface con gran exactitud (20). De hecho, el error es inferior a 10^{-5} en norma L^∞ .

Test 2.2: Solución estacionaria no en reposo.

En este caso, la función de fondo es

$$z_b(x) = \begin{cases} 0,35 \times (\cos(\pi(x - 0,5)/0,1) + 1) & 0,4 < x < 0,5; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta función presenta un fuerte salto en $x = 0,5$, lo que afecta notablemente a la conservación de energía por los esquemas numéricos. Se considera una solución estacionaria no en reposo.

Para este test, buscamos la solución estacionaria correspondiente a $q = 0,1$ y nivel de energía constante igual a 1,005.

Como condición inicial imponemos caudal igual a 0,1 y altura

$$h_i = 1 - \frac{1}{2}(z_{i-1/2} + z_{i+1/2}).$$

Con esta condición inicial se obtiene un nivel de energía constante excepto en un entorno de $x = 0,5$, donde se encuentra el salto de la función fondo. De esta forma se crea una perturbación en este punto y estudiamos la solución estacionaria a la que converge el sistema.

Comparamos nuestro esquema con el método de tipo intercelda propuesto por Jin en [23].

En la Figura 4 comparamos la solución numérica, obtenida por el esquema propuesto con los esquemas introducidos en [23], que denotaremos “métodos Godunov de primer y segundo orden de tipo intercelda”. En la Figura 5 también comparamos con la solución exacta en una zona cercana al obstáculo.

Para mostrar los buenos resultados que proporciona nuestro esquema, presentamos en la Tabla 4.1 los errores correspondientes a los métodos Godunov de primer y segundo orden de tipo intercelda y al esquema propuesto, en norma L^1 y L^∞ .

	Esq. propuesto	Primer orden God. Interf.	Seg. orden God. Interf.
L^1	$7 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$
L^∞	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$

Cuadro 1: Errores en norma L^1 y L^∞ .

Referencias

- [1] A. Bermúdez, M.E. Vázquez Cendón, *Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms*. Computers Fluids 23-8: 1049-1071, 1994.

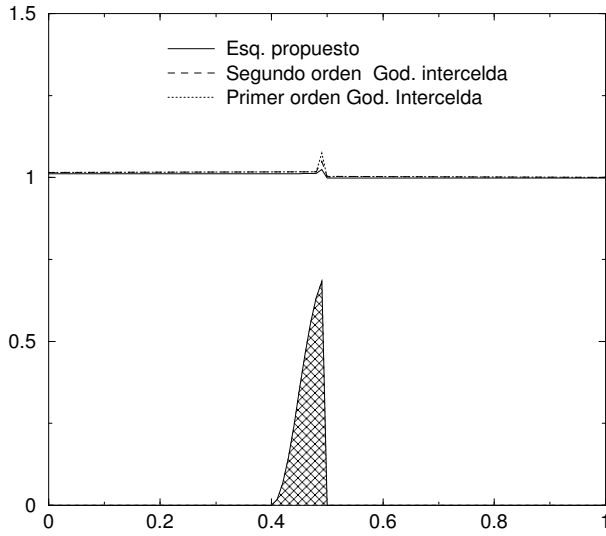


Figura 4: Test 2.2: Comparación de $\frac{1}{2} \left(\frac{q}{h} \right)^2 + g(h + z_b(x))$ para el esquema propuesto y los esquemas Godunov de primer y segundo de tipo interfaz.

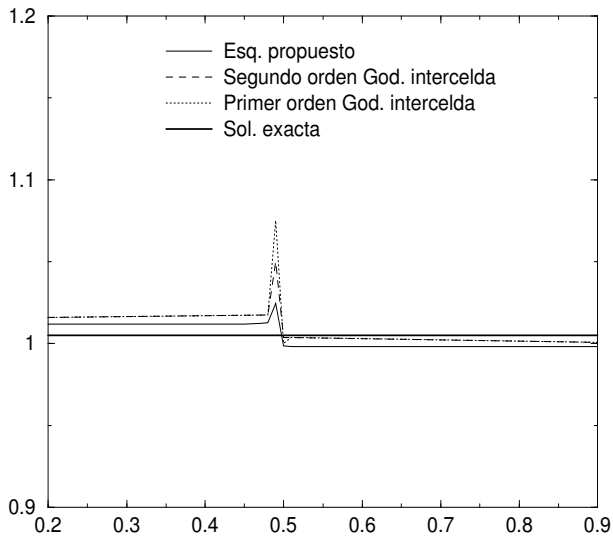


Figura 5: Test 2.2: Ampliación de la Figura 4.

- [2] F. Bouchut, *An introduction to finite volume methods for hyperbolic systems of conservation laws with source*, Ecole CEA - EDF - INRIA, 7-10 octobre 2002, INRIA Rocquencourt, France.
- [3] W. Carlisle Thacker, *Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations*. J. Fluid Mech. 107: 499-508, 1981.
- [4] M.J. Castro, J. Macías, C. Parés. *A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-d shallow water system*. M2AN 35-1: 107-127, 2001.
- [5] M.J. Castro, C. Parés. *On the Well-balance property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow-water systems*. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 38, n. 5, 821-852, 2004.
- [6] T. Chacón Rebollo, A. Domínguez Delgado, E. D. Fernández-Nieto, *A family of stable numerical solvers for Shallow Water equations with source terms*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 192:203-225, 2003.
- [7] T. Chacón Rebollo, A. Domínguez Delgado, E. D. Fernández-Nieto, *An entropy correction free solver for shallor water equations with source term*. M2AN 37-3: 755-772, 2003.
- [8] T. Chacón Rebollo, A. Domínguez Delgado, E. D. Fernández-Nieto, *Asymptotically balanced schemes for non-homogeneous hyperbolic systems. Application to the Shallow Water Equations*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338: 85-90, 2004.
- [9] F. Dubois, G. Mehlman, *A non-parameterized entropy correction for Roe's approximate Riemann solver*. Numer. Math. 73: 169-208, 1996.
- [10] E. D. Fernández-Nieto *Aproximación numérica de leyes de conservación hiperbólicas no homogéneas. Aplicación a las ecuaciones de Aguas Someras*. Tesis Doctoral Universidad de Sevilla, 2003.
- [11] A. C. Fowler, *Mathematical Model in the Applied Sciences* Cambridge, 1997.
- [12] E. Godlewski, P. A. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer - Verlag, 1996.
- [13] J. M. González-Vida. *Desarrollo de esquemas numéricos para el tratamiento de frentes seco-mojado en sistemas de aguas someras*. Tesis Doctoral Universidad de Málaga, 2003.
- [14] J. M. Greenberg, A. Y. Leroux. *A Well-Balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations..* SIAM J. Numer. Anal. 33-1: 1-16, 1996.
- [15] R. J. LeVeque *Numerical Methods for conservation Laws*. Birkhauser Verlag, Zurich, 1990.

- [16] R. J. LeVeque *Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propagation Algorithm*. J. Comput. Phys. 146: 346-365, 1998.
- [17] A. Mangeney, J. P. Vilotte, M. O. Bristeau, B. Perthame, C. Simeoni, S. Yernini, *Numerical modelling of avalanches based on Saint-Venant equations using a kinetic scheme* J. Geophys. Res. 108(B11), 2527, 2003.
- [18] Y. C. Tai, S. Noelle, J. M. Gray, K. Hutter, *Shock-Capturing and Front-Tracking Methods for Granular Avalanches*. J. Comput. Phys. Journal of Comp. Phys. 175, 269-301, 2002.
- [19] B. Perthame, C. Simeoni, *A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term*. Calcolo 38-4: 201-231, 2001.
- [20] B. Perthame, C. Simeoni, *Convergence of the Upwind Interface Source method for hyperbolic conservation laws*. Proceeding of Hyp 2002, T. Hou and E. Tadmor editor, Springer, 2003.
- [21] P. L. Roe. *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. J. Comput. Phys., 43: 357-371, 1981.
- [22] P. L. Roe, *Upwind differencing schemes for hyperbolic conservation laws with source terms*. *Nonlinear Hyperbolic Problems*, C. Carraso, P.-A. Raviart and D. Serre, eds., Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 1270: 41-51, 1986.
- [23] S. Jin, *A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms*. M2AN, 35-4: 631-645, 2001.
- [24] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 1997.
- [25] M. E. Vázquez Cendon. *Estudio de esquemas descentrados para su aplicación a las leyes de conservación hiperbólicas con términos fuente*. Tesis Doctoral Universidad de Santiago de Compostela, 1994.
- [26] J. G. Zhou, D. M. Causon, C. G. Mingham, and D. M. Ingram, *The Surface Gradient Method for the Treatment of Source Terms in the Shallow-Water Equations* J. Comput. Phys. 168: 1-25, 2001.